1011 數值模擬_太空碩一_鄭凌韻_101623014

HW9 模擬常態分布

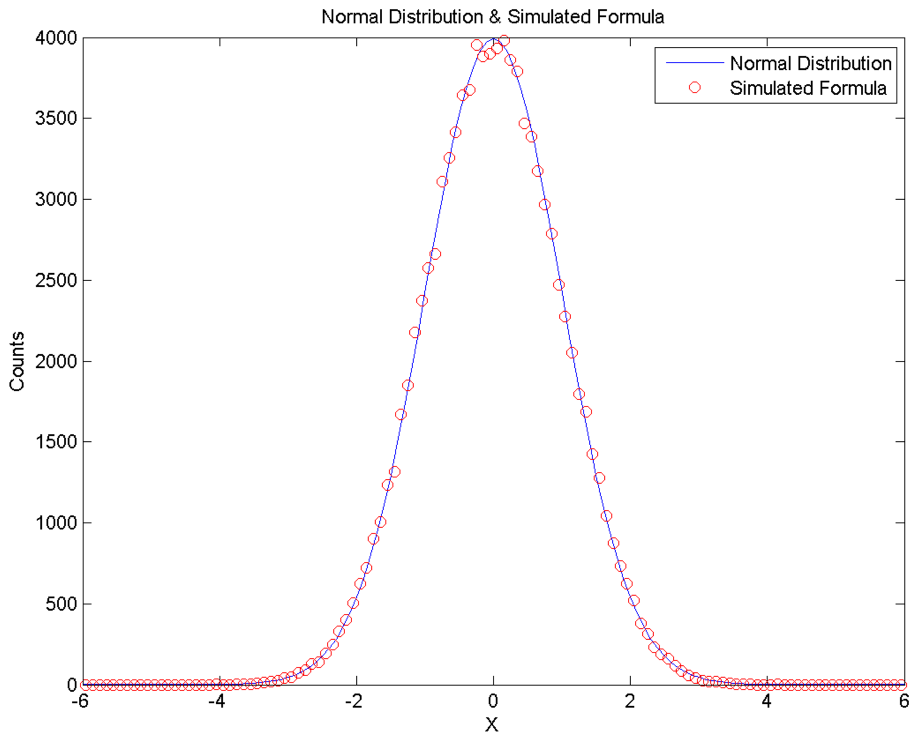
1. [程式繪圖] Using Matlab

```
clear
close all
clc

sample_intv=0.1;      %採樣區間
sample_freq=1e5;      %採樣次數(N)
x_start=-6;       %X值開始
x_end=6;          %X值結束

%計算及繪製常態分佈的理論值
x=x_start:sample_intv:x_end;
y=(1/sqrt(2*pi)).*exp(-x.*x/2)*sample_intv*sample_freq;
plot(x,y)
hold on

%驗證公式是否為常態分布
for i=1:sample_freq        %產生10萬個X值
    Rn=rand(1,12);
    X(i)=sum(Rn)-6;
end

%%
count=[];
for j=x_start:sample_intv:x_end-0.1    %每次運算一個0.1的區間
    n_index=find(X>j & X<j+0.1);       %找出十萬個X值裡面有哪些落在某個(j~j+0.1)的0.1區間內
    n=length(n_index);          %計算分布在某個(j~j+0.1)的0.1區間內的個數
    count=[count n];            %記錄下這些個數
end
hold on
```

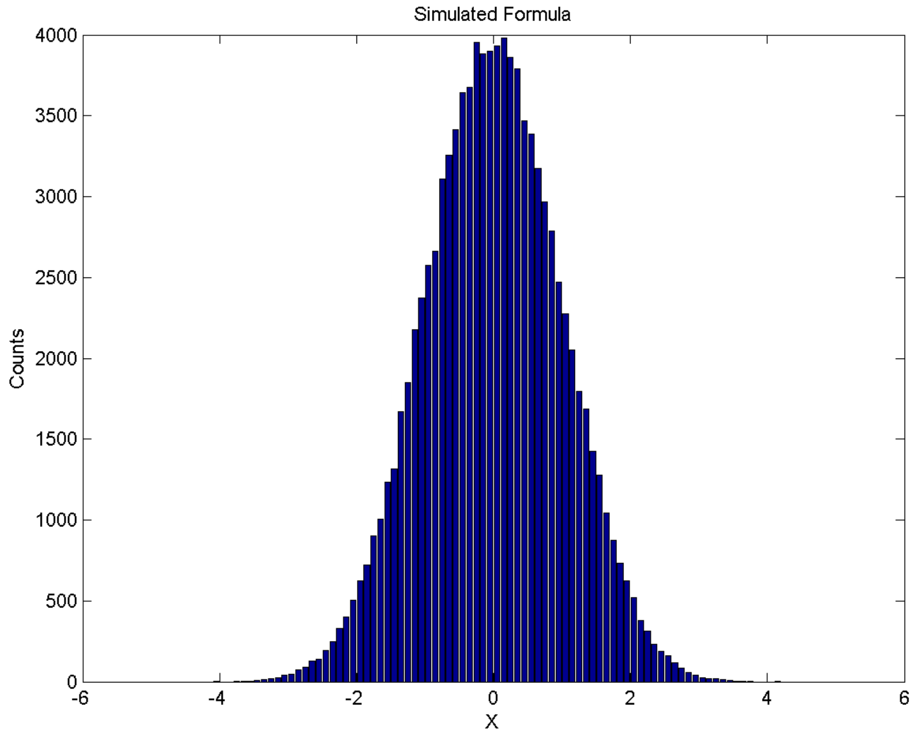
2. 繪圖

```
x2=-5.95:.1:5.95;     %x模擬值，將實際要畫的x座標放在(j~j+0.1)區間內的j+0.05的值上
plot(x2,count,'ro');      %畫出模擬的函數，以紅色圓圈表示
xlabel('X');
ylabel('Counts');
title('Normal Distribution & Simulated Formula')
legend('Normal Distribution','Simulated Formula')
hold off
print('-dpng','HW9.png')
```

1011 數值模擬_太空碩一_鄭凌韻_101623014




```
bar(x2,count);        %畫出模擬的函數，以長條圖表示
xlabel('X');
ylabel('Counts');
title('Simulated Formula')
print('-dpng','HW9-2.png')
```



3. 公式推導

a. 驗證此公式[1]為常態分佈（高斯分布）：

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{12}{k}}} \quad （式 9.1）$$

對於（式 9.1）的 X 值產生 N=100000 次的樣本

假設落在 j 到 j+0.1 區間的 x 值是 n=$\{n_1, n_2, \ldots\ n_{120}\}$個，其中 j= -6, -5.9, -5.8, … 5.8, 5.9

因此出現在 j 到 j+0.1 區間機率 P_1 為$\frac{n}{N}$

b. 常態分佈公式：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} \quad \text{for } \sigma = 1 \quad （式 9.2）$$

對於理論的常態分佈可以計算出介於 j 到 j+0.1 區間的機率 $P_2 = j < f(x) < j + 0.1$

機率可由微積分近似估計成函數上每個微小寬度的面積

$$P_2 = \int_j^{j+1} f(x)dx \approx f(x + 0.05) \times 0.1$$

c. 當 N→∞時，$P_1 \approx P_2$

即 $\frac{n}{N} \approx f(x + 0.05) \times 0.1$

可得 $n \approx f(x + 0.05) \times 0.1 \times N$

---

1 式（9.1）為中央極限定理 (Central Limit Theorem)

中央極限定理 (Casella and Berger, 1990, p.216) 有時也稱為常態收斂定理，主要是指從平均數為 μ，標準差為 σ的母體中，隨機地抽取大小為 n 的獨立樣本 X1, …, Xn。當樣本數 n 很大時，其樣本平均$\overline{X_n}$ 減掉平均數μ 再除以標準差 $\sigma/\sqrt{n}$，將會趨近平均數為 0，標準差為 1 的常態分佈(normal distribution)。或者是說當樣本數 n 很大時，樣本和 Sn=X1= …+ Xn 減掉平均數 nμ 再除以標準差 $\sigma/\sqrt{n}$，將會趨近平均數為 0，標準差為 1 的常態分佈，所以 Sn 的圖形看起來將會很像常態分佈的鐘形。可參考：http://www.math.nsysu.edu.tw/StatDemo/CentralLimitTheorem/CentralLimit.html